Statistiche di motivi e matrici di Vandermonde[1]

Massimiliano Goldwurm, Violetta Lonati

Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Università degli Studi di Milano

Incontro Progetto PRIN
"Linguaggi formali e automi: aspetti matematici e applicativi"

Varese, 17-18 luglio 2006

[1] Theoretical Computer Science, vol. 356, may 2006, 153–170.
Versione parziale in Proceedings S.T.A.C.S. 2005, LNCS n. 2404.

Abstract

Distribuzione limite di $\{Y_n\}_n$

$Y_n = \|x\|_a$	$x \in \{a, b\}^n \Longleftarrow$ modello razionale r
$r \in \mathbb{R}_+\langle\langle a, b\rangle\rangle$	automa s.f. $\mathcal{A}$
	$\mathcal{A}$ primitivo [BCGL2003]
	$\mathcal{A}$ bicomponente [DGL2004]

$\Longrightarrow$ $Y_n \ \sim \cdots$ con $\mathcal{A}$ multicomponente

Caso tipico

$\mathcal{A}$ con 1! catena principale di c.f.c., $\underline{v}$, $\underline{m}$.

$$\frac{Y_n}{n} \longrightarrow_{\text{dist}} \quad X_{\underline{v} \ \underline{m}}$$

$X_{\underline{v} \ \underline{m}}$ definita da Matrici di Vandermonde confluenti.

Lavori precedenti : [BCGL03], [BCGL04], [CGL04], [DGL03], [DGL04], [BCGL06]

Matrici di Vandermonde

$\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_k) \in \mathbb{C}^k \qquad (v_i \neq v_j)$

$$M_{\underline{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_k \\ v_1^2 & v_2^2 & \ldots & v_k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_1^{k-1} & v_2^{k-1} & \ldots & v_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

$$\det(M_{\underline{v}}) = \prod_{i<j} (v_j - v_i)$$

Calcolo di $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ tale che

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1} x^{k-1} + x^k \;, \quad p(v_i) = 0$$

(oppure di $q \in \mathbb{C}[x]$, $q(v_i) = b_i$, $\deg(q)$ minimo)

$$\underline{a} M_{\underline{v}} = (-v_1^k, -v_2^k, \ldots, -v_k^k) \quad \Longrightarrow \quad \underline{a} = -\underline{v}^k M_{\underline{v}}^{-1}$$

Analogamente, se C_p è la matrice companion di $p(x)$, allora

$$C_p = M_{\underline{v}} \operatorname{diag}[v_1, v_2, \ldots, v_k] M_{\underline{v}}^{-1}$$

Matrici di Vandermonde confluenti

$\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_r) \in \mathbb{C}^r$, $v_i \neq v_j$, e
$\underline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$, $m_i \geq 1$, $\sum_i m_i = k$,

$$M_{\underline{v}\ \underline{m}} = [V_1|V_2|\cdots|V_r], \quad \text{dove}$$

$$(V_\ell)_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} v_\ell^{i-j} & \text{se } j \leq i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}, \quad k \times m_\ell$$

Esempio: $\underline{v} = (a, b)$, $\underline{m} = (3, 4)$,

$$M_{\underline{v}\ \underline{m}} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & b^2 & 2b & 1 & 0 \\ a^3 & 3a^2 & 3a & b^3 & 3b^2 & 3b & 1 \\ a^4 & 4a^3 & 6a^2 & b^4 & 4b^3 & 6b^2 & 4b \\ a^5 & 5a^4 & 10a^3 & b^5 & 5b^4 & 10b^3 & 10b^2 \\ a^6 & 6a^5 & 15a^4 & b^6 & 6b^5 & 15b^4 & 20b^3 \end{array} \right)$$

Proprietà

1. $\det(M_{\underline{v}\ \underline{m}}) = \prod_{i<j}(v_j - v_i)^{m_i m_j}$
2. $M_{\underline{v}\ \underline{m}} \iff$ sistema lineare per il calcolo di
$$p(x) = \prod_i (x - v_i)^{m_i}$$
3. $J(C_p) = (M_{\underline{v}\ \underline{m}})^{-1} C_p M_{\underline{v}\ \underline{m}}$
4. i sistemi
$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t)$$
$$\underline{x}(0) = \underline{u}$$
hanno soluzione $\underline{x}(t) = e^{tA}\underline{u}$
$$\text{calcolo di } e^{tA} \equiv \text{calcolo di } (M_{\underline{v}\ \underline{m}})^{-1}$$
$$(\underline{v} \text{ autovalori di } A \text{ di molteplicità } \underline{m})$$
5. decomposizione in fratti semplici
6. manipolazione di convoluzioni multiple

Decomposizione in fratti semplici

Dati $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_r) \in \mathbb{C}^r$, $v_i \neq v_j$, e
$\underline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_r) \in \mathbb{N}^r$, $m_i \geq 1$,

determinare $w_{ij} \in \mathbb{C}$ tali che

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(x - v_i)^{m_i}} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{w_{ij}}{(x - v_i)^j}$$

Utile per

- calcolo di integrali di funzioni razionali
- calcolo dei coefficienti di Taylor di funzioni razionali

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1}{(x - v_i)^{m_i}} = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$$

esprimere a_n in funzione dei v_i

- trattare convoluzioni multiple
  $\{a_n\}$ = convoluzione multipla delle $\{-v_i^{-n-1}\}$ ciascuna presa con molteplicità m_i
  $$a_n = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} (-1)^j w_{ij} \binom{n+j-1}{j-1} v^{-n-j}$$

Teorema

Posto $\underline{w} = \left(w_{11} \cdots w_{1m_1} \middle| w_{21} \cdots w_{2m_2} \middle| \cdots \middle| w_{r1} \cdots w_{rm_r}\right)$,

$\underline{w}^T$ è l'ultima colonna di $(M_{\underline{v}\ \underline{m}})^{-1}$

$$\Longrightarrow \quad M_{\underline{v}\ \underline{m}}\, \underline{w}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Distribuzioni di Vandermonde

Dati $\underline{v} \in \mathbb{R}^r$, $0 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_r$,
$\underline{m} \in \mathbb{N}^r$, $m_i \geq 1$, $\sum_i m_i = k$

$$p(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - v_i)^{m_i}$$

$\{w_{ij}\}$ ultima colonna di $(M_{\underline{v}\ \underline{u}})^{-1}$

$$f_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < v_1 \\ (k-1) \sum_{\ell=h}^{r} \sum_{j=1}^{m_\ell} \binom{k-2}{j-1} w_{\ell j} (v_\ell - x)^{k-j-1} & \text{if } v_{h-1} \leq x < v_h \\ & (1 < h \leq r) \\ 0 & \text{if } x \geq v_r \end{cases}$$

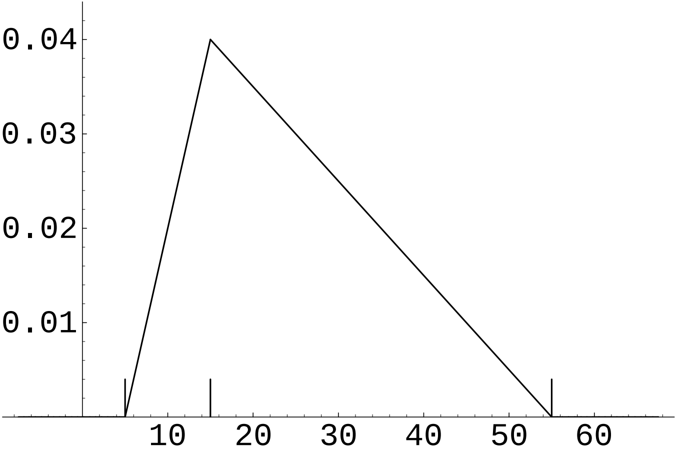
Proprieta' : densita' polinomiale a "pezzi",
saldature "continue" nei punti v_i,
il grado di continuita' dipende da m_i

Esempi semplici ($\underline{m} = (1, 1, \dots, 1)$)

1) densità uniforme nel caso $r = 2$

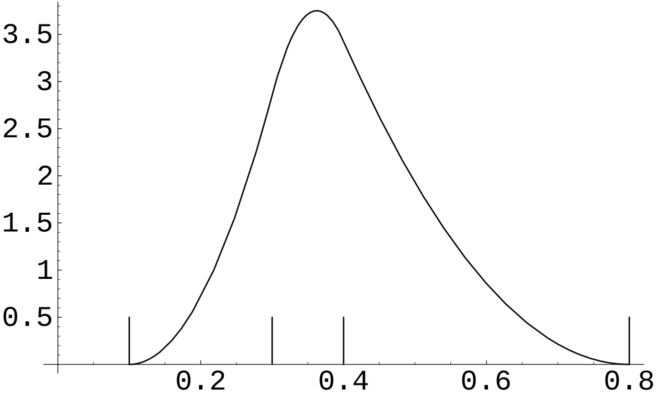
$$\underline{v} = (a, b), \ \underline{m} = (1, 1) \implies f_p(x) = \frac{1}{b - a}, \ \forall x \in [a, b]$$

2) densità triangolare nel caso $\underline{v} = (a, b, c)$, $\underline{m} = (1, 1, 1)$,



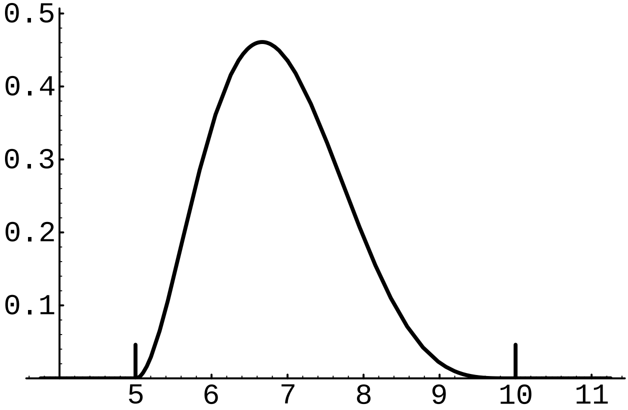
$f_p(x)$ nel caso $v = (5, 15, 55)$ and $m = (1, 1, 1)$.

3) comportamento quadratico (derivabile con continuità)

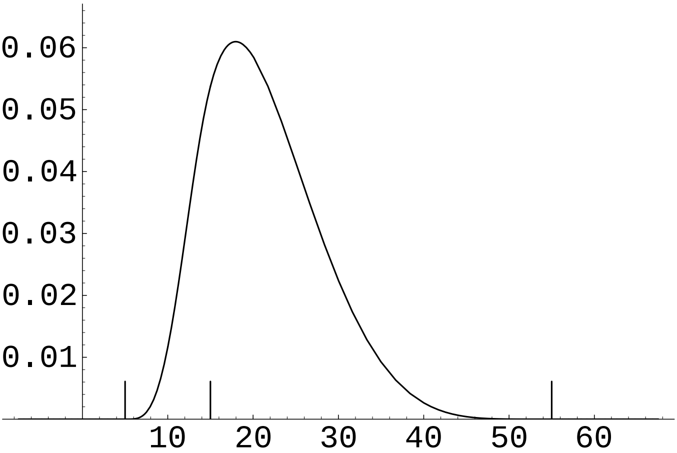


$f_p(x)$ nel caso $v = (0.1, 0.3, 0.4, 0.8)$ and $m = (1, 1, 1, 1)$.

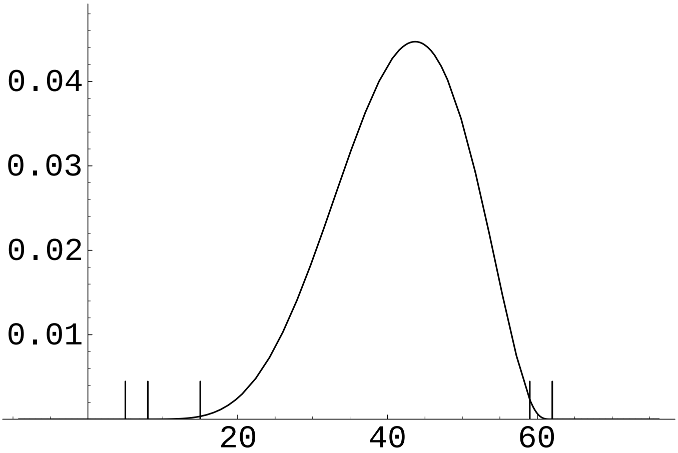
Comportamenti regolari $m \geq 1$



Funzione $f_p(x)$ per $v = (5, 10)$ e $m = (5, 3)$.

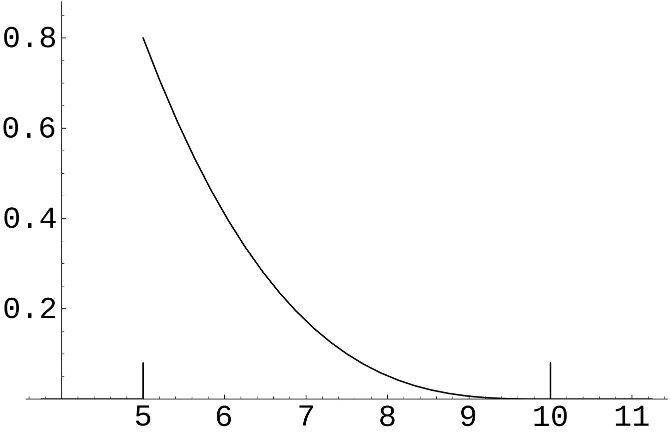


Funzione $f_p(x)$ per $v = (5, 15, 55)$ e $m = (3, 3, 2)$.

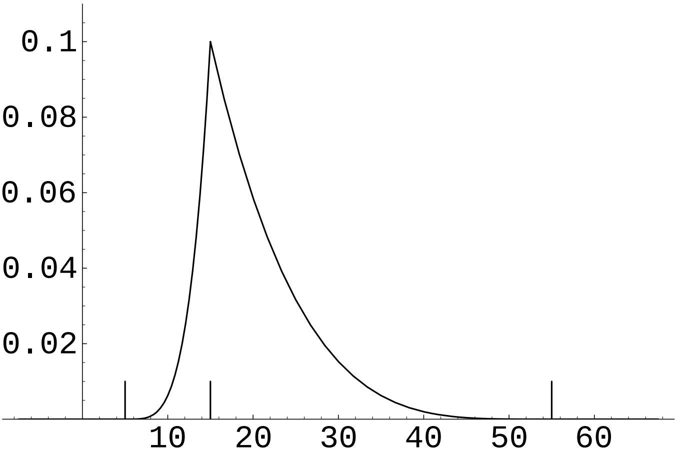


Funzione $f_p(x)$ per $v = (5, 8, 15, 59, 62)$ e $m = (1, 1, 1, 2, 3)$.

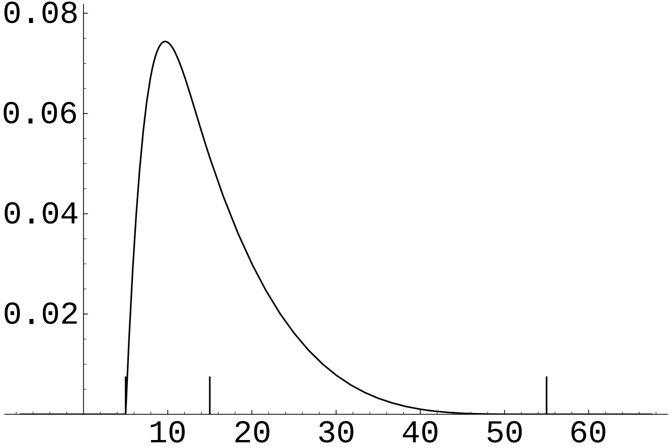
Comportamenti irregolari



Funzione $f_p(x)$ per $v = (5, 10)$ e $m = (4, 1)$.



Funzione $f_p(x)$ per $v = (5, 15, 55)$ e $m = (1, 4, 1)$.



Funzione $f_p(x)$ per $v = (5, 15, 55)$ e $m = (4, 1, 1)$.

Formalmente

1. $f_p(x) \in C^{k-2}(\mathbb{R}\backslash\{v_1, v_2, \ldots, v_r\})$
2. in ogni v_i abbiamo $f_p(x) \in C^{k-m_i-2}(U(v_i))$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \text{continua in } \mathbb{R} \text{ nel caso } r \geq 3 \\ \text{di classe } C^1 \text{ in } \mathbb{R} \text{ nel caso } r \geq 4 \end{cases}$$

3. $f_p(x)$ è unimodale in $[v_1, v_r]$ tranne nel caso $\underline{m} = (1, 1)$,
4. funzione caratteristica di $f_p(x)$:

$$\begin{aligned} \Phi_p(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x) e^{itx} dx \\ &= \frac{(k-1)!}{(it)^{k-1}} \sum_{\ell=1}^{r} e^{itv_\ell} \sum_{j=1}^{m_\ell} \frac{w_{\ell j}}{(j-1)!} \, (it)^{j-1} \, . \end{aligned}$$

Modello razionale

Definizione

$\{a, b\}$	alfabeto binario
$r \in \mathbb{R}_+\langle\langle a, b\rangle\rangle$	serie razionale su $\{a, b\}^*$ a valori in $\mathbb{R}_+$ definita da un automa s.f. $\mathcal{A}$ pesato in $\mathbb{R}_+$
per ogni $n \in \mathbb{N}$	esiste $x \in \{a, b\}^n$ tale che $(r, x) \neq 0$.

Poniamo $\Pr_n : \{a, b\}^n \longrightarrow [0, 1]$ tale che

$$\Pr_n(w) = \frac{(r, w)}{\sum_{|x|=n}(r, x)} \qquad w \in \{a, b\}^n$$

$\Longrightarrow$ $\Pr_n$ misura di probabilità in $\{a, b\}^n$.

Definiamo $Y_n : \{a, b\}^n \longrightarrow \{0, 1, \dots, n\}$ variabile aleatoria

$$Y_n(w) = |w|_a \qquad (w \in \{a, b\}^n \text{ con probabilità } \Pr_n(w))$$

Caso primitivo [BCGL2003]

$\mathcal{A}$ primitivo $\Longrightarrow \ \exists\ 0 < \beta < 1, \gamma > 0$ tali che

$$\begin{array}{rcl} E(Y_n) & = & \beta n + O(1) \\ \mathrm{var}(Y_n) & = & \gamma n + O(1) \\ \dfrac{Y_n - \beta n}{\gamma\sqrt{n}} & \to_{\mathrm{dist}} & \mathcal{N}_{0,1} \end{array}$$

Caso multicomponente

Definizioni

$G_1, G_2, \ldots, G_s$	componenti fortemente connesse di $\mathcal{A}$
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$	autovalori di P.-F. delle G_i
G_i componente dominante	
	se $\lambda_i = \max\{\lambda_j \mid j = 1, \ldots, s\}$
$\mathcal{C} = (G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_t})$	catena
	se $\exists$ s. iniziale in G_{i_1}, $\exists$ s. finale in G_{i_t} e
	per ogni j, $G_{i_j} \to G_{i_{j+1}}$
	$d(\mathcal{C}) = \sharp\{G_{i_j}$ dominante in $\mathcal{C}\}$
catena principale	$d(\mathcal{C}) = \max\{d(\mathcal{L}) \mid \mathcal{L}$ catena $\}$
modello semplice	se $\exists!$ catena principale $\mathcal{C}$ e
	ogni G_j dominante in $\mathcal{C}$ e' primitiva

Risultato

Modello semplice $\mathcal{A}$,
catena principale $\mathcal{C}$ con componenti dominanti $G_{j_1}, G_{j_2}, \ldots, G_{j_k}$;

$\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$	vettore delle *medie* distinte
$\underline{m} = (m_1, \ldots, m_r)$	vettore delle molteplicita'
$X_{\underline{\beta}\ \underline{m}}$	variabile aleatoria di densita' $f_q(x)$ dove $q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x - \beta_i)^{m_i}$.

$$r \geq 2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{Y_n}{n} \rightarrow_{\text{dist}} X_{\underline{\beta}\ \underline{m}}$$

- Prova basata su: (i) catene principali, (ii) $\Phi_{Y_n/n}(t)$.
- Estensioni al caso $r = 1$, $\sim \underline{\gamma}$.
- Problemi aperti:
  - distribuzione limite nel caso $r = 1$,
  - proprietà di limite locale,
  - applicazione di questi risultati ad altri modelli.