

Laboratorio di algoritmi e strutture dati

Docente: Violetta Lonati

In questa scheda si propone un lavoro di analisi e progettazione di soluzioni algoritmiche relative a situazioni che possono essere modellate utilizzando dei grafi.

Nota: siete invitati anche a implementare le soluzioni, ma non troverete in questa scheda indicazioni per questa parte del lavoro.

Aromaterapia

L'eccentrico sindaco di una città di cui non si può riportare il nome, vuole creare un servizio centrale di aromaterapia a beneficio degli abitanti. Il progetto prevede di diffondere in ogni abitazione della città delle sostanze aromatiche, distribuite tramite un sistema di tubazioni collocate sotto tutte le strade, ricalcando esattamente la mappa stradale della città.

Tubazioni (esercizio proposto nella prova scritta del 3 febbraio 2017)

Ci sono due tipi di tubazioni.

- Le tubazioni *primarie*, tutte connesse tra loro, scorreranno sotto alcuni tratti di strada in modo che ciascun incrocio sia raggiunto, nel sottosuolo, da almeno una di esse.
- Le tubazioni *secondarie* saranno collocate sotto i tratti di strada non serviti da tubazione primarie. Ogni tubazione secondaria sarà collegata alle tubazioni primarie che si trovano sotto i due incroci che delimitano il tratto di strada da essa servito.

Al fine di ridurre i costi di realizzazione del progetto, è necessario trovare una soluzione che minimizzi la lunghezza totale delle tubazioni primarie.

- (a) Spiegate come il problema possa essere descritto e formalizzato in termini di grafi.
- (b) Progettate un algoritmo che determini l'insieme delle strade che devono essere attraversate da tubazioni primarie e l'insieme delle strade che devono essere attraversate da tubazioni secondarie: descrivete l'algoritmo a parole e poi, ad alto livello, in pseudocodice. È opportuno ispirarsi a uno degli algoritmi presentati nel corso.
- (c) Discutete una possibile rappresentazione del grafo utilizzato e una corrispondente implementazione dell'algoritmo, fornendo una stima dei tempi di calcolo.

Note:

- Un tratto di strada è una parte di strada delimitata da due incroci e senza incroci all'interno. La fine di una strada a fondo chiuso è considerata un incrocio.
- Il problema richiede di minimizzare la lunghezza totale delle tubazioni primarie. Nella realtà (ad esempio reti per distribuzione acqua o gas) questi problemi devono essere risolti considerando altri parametri che influiscono, ad esempio, sulla scelta dei diametri delle tubazioni utilizzate nei vari tratti di strada.

Pulizia (esercizio proposto nella prova scritta del 16 giugno 2017)

Il sistema di aromaterapia è stato messo in funzione da qualche settimana.

Dopo un breve periodo di grande euforia, gli abitanti della città hanno cominciato a mostrare forti segni di depressione e stanchezza. Gli psicologi che sono stati interpellati per studiare la situazione sono giunti alla conclusione che ciò sia dovuto al fatto che il sistema eroga sempre lo stesso aroma. Il problema potrebbe essere facilmente risolto cambiando ogni giorno l'aroma utilizzato. Questa soluzione però presenta un inconveniente tecnico: cambiando aroma, nelle tubazioni si scatenano delle reazioni chimiche che producono esalazioni insopportabili. Per evitare questo problema, prima di cambiare aroma è necessario effettuare una pulizia delle tubazioni, mediante una sostanza che dipende dall'aroma da sostituire e dal nuovo aroma che si dovrà utilizzare.

Supponendo di avere n aromi differenti a_1, a_2, \dots, a_n , indichiamo con $c_{i,j}$ il costo della pulizia quando, dopo l'aroma a_i si deve utilizzare l'aroma a_j , $i, j = 1, \dots, n$. Si vuole trovare una permutazione $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ di $(1, 2, \dots, n)$, in modo che utilizzando ciclicamente gli aromi nell'ordine fornito dalla permutazione, cioè nell'ordine $a_{\pi_1}, a_{\pi_2}, \dots, a_{\pi_n}$, ricominciando da a_{π_1} dopo a_{π_n} , il costo totale per la pulizia sia minimo.

Nota: Chiamiamo *costo della permutazione* $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ la somma dei costi di pulizia per passare da un aroma all'altro tornando all'inizio, secondo l'ordine dato dalla permutazione. Formalmente può essere espresso come $\sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi_i, \pi_{i+1}} + c_{\pi_n, \pi_1}$. Il problema è dunque quello di trovare una permutazione di costo minimo.

Esempio: Supponete $n = 4$, con i costi c_{ij} dati dalla matrice riportata a destra. Il costo della permutazione $(1, 3, 2, 4)$ è $1 + 4 + 2 + 1 = 8$, mentre il costo di $(1, 4, 2, 3)$ è $3 + 1 + 2 + 1 = 7$. Si osservi che data una permutazione, facendo scorrere circolarmente gli elementi è possibile trovare una permutazione dello stesso costo che inizia da a_1 . Ad esempio, la permutazione $(4, 1, 3, 2)$ ha lo stesso costo di $(1, 3, 2, 4)$. Pertanto si possono considerare solo permutazioni $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ con $\pi_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cosa si richiede:

- Descrivete *sinteticamente a parole* e poi ad alto livello in pseudocodice, un algoritmo che utilizzando la *tecnica greedy* determini una permutazione cercando di minimizzare il costo.
- Fornite una stima dei tempi di calcolo dell'algoritmo ottenuto in funzione del numero n di aromi.
- Indicate se l'algoritmo trova sempre una soluzione ottima oppure no, motivando la risposta. In particolare, in caso di risposta negativa presentate un esempio in cui non viene trovato l'ottimo (indicate la matrice dei costi in ingresso, la soluzione ottenuta dall'algoritmo che avete scritto e una soluzione ottima, con i rispettivi costi).