Laboratorio di algoritmi e strutture dati

Esercizi su grafi*

Docente: Violetta Lonati

1 Rappresentazione di grafi

1.1 Slice di liste di adiacenza

Nel caso, semplificato, in cui i vertici del grafo siano identificati semplicemente da numeri naturali progressivi 0, 1, 2, ..., possiamo rappresentare la relazione di adiacenza con un *vettore di liste di adiacenza*. In questo caso l'insieme dei vertici viene rappresentato implicitamente: basta memorizzare il numero di vertici con una variabile intera `n` e l'insieme dei vertici è dato implicitmente dai numeri da o a `n-1`.

Realizzate questa implementazione dei grafi riutilizzando le funzioni già scritte per implementare liste concatenatele.

- Definite un tipo `graph` come segue

```
type grafo struct {
  n          int // numero di vertici
  adiacenti []*linkedList
}
```

- Scrivete una funzione con segnatura `nuovoGrafo(n int) *graph` che restituisce l'indirizzo di un nuovo grafo con `n` nodi.

- Scrivete una funzione per leggere un grafo da standard input. Secificate voi il formato atteso, ad esempio: un numero n che indica il numero di vertici seguito da una serie di coppie di indici, una coppia per riga). La funzione dovrà allocare una slice di puntatori a lista, e inizializzare opportunamente tali puntatori. Dovrà poi inserire gli archi (inserendo in testa alla lista di adiacenza opportuna)

- Scrivete una funzione per stampare un grafo. Specificate voi il formato, ad esempio: l'indice di un vertice su ogni riga, seguito dagli indici dei vertici a lui adiacenti.

- Scrivete una funzione che dati due interi x e y stabilisca se c'è un arco tra x e y.

*Ultimo aggiornamento: 24 novembre 2022 - 08:25:17

1.2 Struttura per i vertici e mappa per la relazione di adiacenza

Nel caso in cui i vertici del grafo non possano essere immediatamente ridotti a numeri interi progressivi, è necessario rappresentare anche l'insieme dei vertici. In questo caso si può definire una struttura di tipo `vertice`.

```
type vertice struct {
  valore item
  chiave string
}
```

La chiave `chiave` identifica il vertice (nel caso sopra si tratta di una stringa, ma potrebbe essere di altro tipo); le altre informazioni relative al vertice sono raggruppate sotto il campo `valore` di tipo `item`. A seconda dei casi, `item` potrebbe essere un tipo built-in o un tipo più articolato, ad esempio a sua volta un'altra struttura.

Tipicamente, può essere utile poter cercare efficientemente i vertici; per questo può essere utile rappresentare l'insieme dei vertici con una mappa che ad ogni chiave associa il suo vertice (o meglio, un puntatore al vertice):

```
vertici map[string]*vertice
```

In alternativa può bastare avere una slice dei (puntatori ai) vertici:

```
vertici []*vertice
```

Per rappresentare la relazione di adiacenza usiamo un'altra mappa, che associa ad ogni vertice l'insieme dei suoi vicini. Poiché tipicamente non ci aspettiamo che questi insiemi di adiacenti siano grande, possiamo rappresentare ciascuno di essi con una slice. Quindi definiamo una mappa che associa ad ogni vertice v la slice dei (puntatori ai) vertici adiacenti a v

```
adiacenti map[vertice][]*vertice
```

Complessivamente quindi il grafo può essere definito come segue:

```
type grafo struct {
  vertici map[string]*vertice
  adiacenti map[vertice][]*vertice
}
```

Assumiamo per esempio di avere un grafo (orientato) in cui ogni vertice rappresenta un utente di una rete sociale (tipo Twitter). Ogni vertice ha un nome, un'età, e una serie di hobby (rappresentiamoli come come slice di stringhe: ogni stringa descrive un hobby). C'è un arco dal vertice A al vertice B se l'utente rappresentato dal vertice A *segue* l'utente rappresentato dal vertice B.

Realizzate un'implementazione dei grafi usando la rappresentazione descritta qui sopra:

- Scrivete una funzione con segnatura `graphNew(n int) *graph` che restituisce l'indirizzo di un nuovo grafo con `n` nodi.
- Scrivete una funzione per leggere un grafo da standard input (specificate voi il formato atteso).

- Scrivete una funzione per stampare un grafo (specificate voi il formato).
- Scrivete una funzione che data una stringa `A` stampi gli hobby dell'utente di nome `A` e l'elenco di tutti gli hobby delle persone **che seguono** `A`.
- Scrivete una funzione che data una stringa `A` stampi gli hobby dell'utente di nome `A` e l'elenco di tutti gli hobby delle persone **seguite** da `A`. Quale è la più complessa tra questa e l'operazione precedente?

1.3 Lista dei vertici implicita

Se i vertici non sono semplici numeri (come nella parte 1.1), ma nemmeno strutture troppo articolate (come nella parte 1.2), si può evitare di rappresentare esplicitamente i vertici (dunque non è necessario definire il tipo `vertice`) o il loro insieme; il grafo verrà rappresentato soltanto tramite la mappa che che descrive la relazione di adiacenza. Se ad esempio i vertici sono identificati da stringhe, si può definire:

```
type grafo map[string][]string
```

L'insieme dei vertici non è definito esplicitamente, ma risulta definito implicitamente dall'insieme delle chiavi della mappa (qui un insieme di stringhe)

2 Visite di grafi

L'implementazione delle visita andrà adattata a seconda di come si è scelto di rappresentare il grafo. Consideriamo adesso l'ultima delle rappresentazioni (la più semplice). E' opportuno provare a implementare le varie visite anche con le altre rappresentazioni

2.1 Visita in profondità con funzione ricorsiva

Implementiamo la visita in profondità con una funzione ricorsiva:

```
func dfs1(g grafo, v string, aux map[string]bool) {
  fmt.Println(v)
  aux[v] = true
  for _, v2 := range g[v] {
    if aux[v2] != true {
      dfs1(g, v2, aux)
    }
  }

}
```

La funzione fa uso di una struttura di supporto `aux` che serve a ricordare quali vertici sono già stati visitati. Qui usiamo una mappa da stringa a bool, poiché i vertici sono identificati semplicemente da stringhe). Prima di invocare la funzione, `aux` andrà allocata e inizializzata opportunamente.

NOTA: se si usasse la rappresentazione descritta nella parte 1.1, sarebbe più coerente usare una slice (i vertici sono individuati dagli indici interi).

2.2 Visita in ampiezza

Per implementare la visita in ampiezza usiamo una coda. Realizziamo la coda usando una slice di stringhe: inseriamo (*enqueue*) in fondo con `append` e estraiamo (*dequeue*) dall'inizio con `[1:]`

```
func bfs1(g grafo, v string, aux map[string]bool) {
  coda := []string{v}
  aux[v] = true

  for len(coda) > 0 {
    v := coda[0]
    coda = coda[1:]
    fmt.Println("\t", v)

    for _, v2 := range g[v] {
      if !aux[v2] {
        coda = append(coda, v2)
        aux[v2] = true
      }
    }
  }
}
```

La visita (in questo caso stampiamo la stringa che identifica il vertice) avviene quando si estraggono gli elementi dalla coda. Quando inseriamo un vertice nella coda lo marchiamo come visitato (usando la solita mappa `aux`).

2.3 Visita in profondità con pila di supporto

Sostituendo la coda con una pila (basta fare anche l'estrazione dal fondo invece che dall'inizio, come per l'inserimento), si ottiene un implementazione non ricorsiva della visita in profondità.

3 Proprietà dei grafo

Scrivete delle funzioni che permettano di svolgere le seguenti operazioni su grafi. Tali operazioni possono essere efficientemente eseguite sfruttando le visite di grafi implementate in precedenza.

Scegliete voi quale rappresentazione del grafo usare; provate a implementare la stessa operazione con rappresentazioni riverse; valutate quale rappresentazione

Attenzione: le segnature delle funzioni potranno richiedere altri argomenti oltre a quelli indicati nelle specifiche delle operazioni!

1. **gen** (*p*) genera un grafo casuale, a partire dalla probabilità *p* compresa tra 0 e 1 (inclusi). Il modello matematico di riferimento è il seguente: si considerano tutti i possibili archi

includendoli nel grafo con probabilità p. Più esplicitamente, per ogni possibile coppia di vertici, si genera un numero reale compreso tra 0 e 1; se questo è minore di p si inserisce l'arco, altrimenti non lo si inserisce.
NB: potete usare questa operazione per generare grafi su cui testare la correttezza dei vostri programmi!

2. **degree** (*v*) calcola il grado del vertice v.
   Si ricorda che il *grado* di un vertice è definito come il numero di vertici ad esso adiacenti.

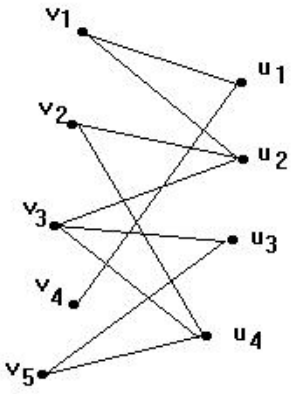
3. **path** (*v*, *w*) testa l'esistenza di un cammino semplice che collega i vertici v e w.
   Si ricorda che un cammino si dice *semplice* quando attraversa ogni vertice al più una volta. il numero di vertici ad esso adiacenti.

4. **ccc** conta il numero di componenti connesse di un grafo (non orientato).
   Si ricorda che si chiama *componente connessa* di un grafo ogni insieme massimale di vertici connessi tra loro da un cammino.

5. **cc** (*v*) stampa l'elenco dei vertici della componente connessa contenente v;

6. **span** (*v*) calcola uno spanning tree con radice v e lo stampa nella rappresentazione "a sommario".
   Si ricorda che si definisce *spanning tree* (in italiano, *albero di copertura*) un albero che ha per nodi tutti e soli i vertici del grafo. Osservate che per ottenere uno spanning tree con radice v è sufficiente eseguire una visita della componente connessa contenente v stampando ad ogni passo l'arco attraversato. Che tipo di visita si deve eseguire per avere la garanzia di ottenere uno spanning tree di altezza minimale?

7. **twocolor** testa se il grafo è bicolorabile.
   Un grafo si dice *bicolorabile* quando è possibile assegnare ad ogni vertice del grafo uno dei due colori bianco o nero in modo che due nodi vicini abbiano sempre colori diversi. Quando un grafo è bicolorabile, si dice anche che è *bipartito*. Ad esempio, il grafo nell'illustrazione è bipartito (basta colorare i vertici v_i di bianco e i vertici u_i di nero).



Osservate che per verificare questa proprietà del grafo è sufficiente eseguire una visita in profondità, assegnando colori alternati ai vertici che si visitano man mano.

8. **oddcycles** testa se il grafo contiene cicli di lunghezza dispari.
   Si ricorda che un *ciclo* è un cammino che parte e finisce nello stesso vertice. Prima di implementare questa operazione, osservate quale relazione c'è tra questa proprietà e la precedente!