# Programmazione dinamica

Violetta Lonati

Università degli studi di Milano
Dipartimento di Informatica

Laboratorio di algoritmi e strutture dati
Corso di laurea in Informatica

# Argomenti

Programmazione dinamica: caratteristiche generali

Scheduling di intervalli pesati

Il problema dello zaino

# Argomenti

Programmazione dinamica: caratteristiche generali

Scheduling di intervalli pesati

Il problema dello zaino

# Programmazione dinamica e problemi di ottimizzazione

- Tipicamente la programmazione dinamica si applica a *problemi di ottimizzazione*.
- Questi problemi ammettono in genere molte soluzioni possibili.
- Ciascuna soluzione ha un *valore* e ci interessa trovare una delle soluzione che ha il valore *ottimo* (massimo o minimo).
- Chiamiamo tale soluzione *una soluzione ottimale* (non è detto che ce ne sia una sola!)

# Programmazione dinamica: approccio generale

La programmazione dinamica risolve un problema combinando le soluzioni dei suoi sottoproblemi. L'approccio generale si può riassumere in 4 passi.

1. Caratterizzare la struttura di una soluzione ottimale.
2. Definire ricorsivamente il valore di una soluzione ottimale (e quindi di tutte).
3. Calcolare il valore delle soluzioni ottimali, tipicamente in maniera *bottom-up*, memorizzando in tabelle i valori delle sottosoluzioni ottimali.
4. Costruire una soluzione ottimale usando le informazioni già calcolate e memorizzate.

Nota: il termine *programming*, tradotto con *programmazione*, non si riferisce alla scrittura di codice, ma al fatto che il metodo prevede la compilazione di tabelle.

# Programmazione dinamica: quando è utile

- Sottostruttura ottima: la soluzione ottimale contiene al suo interno le soluzioni ottimali dei suoi sottoproblemi
- Sottoproblemi sovrapposti: i sottoproblemi coinvolti devono *essere sempre quelli*, cioè lo spazio dei sottoproblemi deve essere *piccolo*; il numero dei sottoproblemi distinti deve essere polinomiale nella dimensione dell'input.

# Programmazione dinamica VS metodo divide-et-impera

Come il metodo divide-et-impera, la programmazione dinamica risolve un problema combinando le soluzioni dei suoi sottoproblemi.
La programmazione dinamica è utile quando i sottoproblemi si sovrappongono, ovvero *diversi sottoproblemi contengono gli stessi sottosottoproblemi*:

- il metodo divide-et-impera risolverebbe i sottoproblemi inutilmente ogni volta
- un algoritmi di programmazione dinamica risolve ogni sottoproblema una sola volta e ne memorizza la soluzione in una tabella (memoization), evitando di dover ripetere ogni volta il calcolo della soluzione di un sottoproblema già risolto.

## Esempio: Fibonacci

L'albero delle chiamate ricorsive *esplode*! Memorizzando i valori già calcolati, evito di ripetere calcoli già svolti.

# Argomenti

Programmazione dinamica: caratteristiche generali

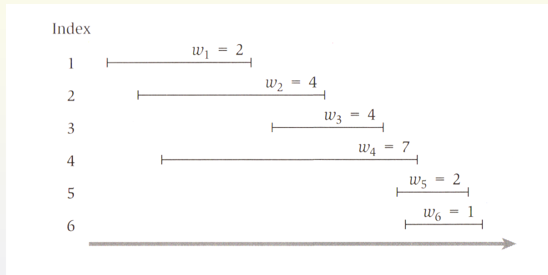
Scheduling di intervalli pesati

Il problema dello zaino

# *Scheduling* di intervalli pesati - il problema

Intervallo: $(i, f, v)$, dove

- $i$ è il tempo di inizio,
- $f$ è il tempo di fine,
- $v$ è il valore (o peso) dell'intervallo.




Dato un insieme $I$ di intervalli, una soluzione al problema dello scheduling è data da un sottoinsieme $S \subseteq I$ di intervalli che non si sovrappongono fra loro.
Il valore di una soluzione $S$ è dato dalla somma dei valori degli intervalli contenuti in $S$

# *Scheduling* di intervalli pesati - continua

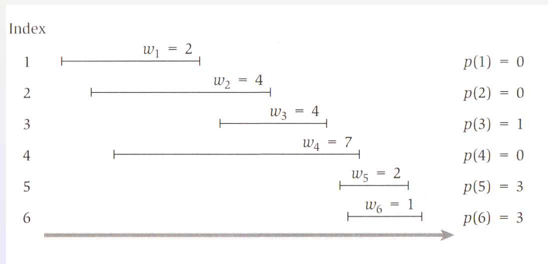
Ordiniamo gli elementi di $i$ in base al tempo di fine:

$$I = \{(i_1, f_1, v_1), (i_2, f_2, v_2), \ldots, (i_n, f_n, v_n)\}$$

$$f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n$$

## Definizione

Per ogni indice $j$ tra 1 e $n$, sia $p(j)$ come il più grande indice $i < j$ tale che l'intervallo di indice $i$ non si sovrappone all'intervallo di indice $j$.



# *Scheduling* di intervalli pesati - soluzione ricorsiva

Detto $Opt(j)$ il valore di una qualsiasi soluzione ottimale $S_j$ costruita usando gli intervalli di indici $\{1, 2, \ldots, j\}$, vale questa relazione ricorsiva:

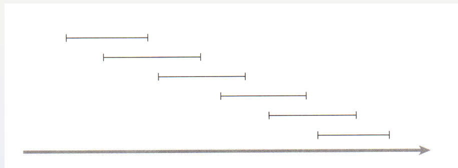
$$Opt(j) = max\{v_j + Opt(p(j)), Opt(j-1)\}$$

- se $j \in S_j$, allora $Opt(j) = v_j + Opt(p(j))$,
- altrimenti $Opt(j) = Opt(j-1)$.

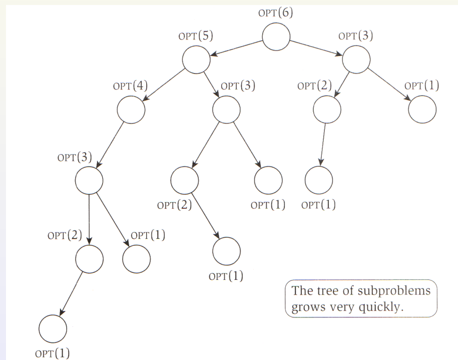
```
Compute-Opt(j)
  If j = 0 then
    Return 0
  Else
    Return max(v_j+Compute-Opt(p(j)), Compute-Opt(j − 1))
  Endif
```

# *Scheduling* di intervalli pesati - complessità?

Ogni sottoproblema può venire calcolato molte volte!!



Su questa istanza del problema




le chiamate ricorsive "esplodono"!

# *Scheduling* di intervalli pesati - *Memoization*

Memorizziamo le soluzioni dei sottoproblemi in un vettore, riducendo le chiamate ricorsive:

```
M-Compute-Opt(j)
  If j = 0 then
    Return 0
  Else if M[j] is not empty then
    Return M[j]
  Else
    Define M[j] = max(v_j+M-Compute-Opt(p(j)), M-Compute-Opt(j − 1))
    Return M[j]
  Endif
```

# *Scheduling* di intervalli pesati - Ricostruire la soluzione

Non c'è bisogno di aggiungere informazioni. C'è già tutto nel vettore!

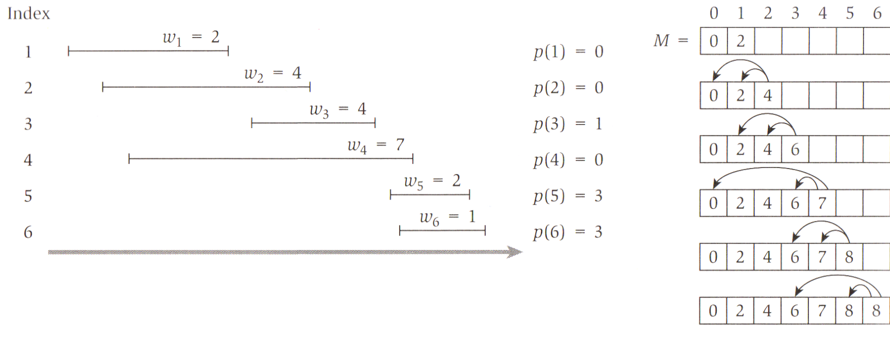
```
Find-Solution(j)
  If j = 0 then
    Output nothing
  Else
    If v_j + M[p(j)] ≥ M[j − 1] then
      Output j together with the result of Find-Solution(p(j))
    Else
      Output the result of Find-Solution(j − 1)
    Endif
  Endif
```

## *Scheduling* di intervalli pesati - Programmazione dinamica

Costruiamo il vettore delle soluzioni dei sottoproblemi senza ricorsione:

```
Iterative-Compute-Opt
  M[0] = 0
  For j = 1, 2, ..., n
    M[j] = max(v_j + M[p(j)], M[j − 1])
  Endfor
```

# *Scheduling* di intervalli pesati - Esempio di esecuzione



# Argomenti

Programmazione dinamica: caratteristiche generali

Scheduling di intervalli pesati

Il problema dello zaino

# Il problema dello zaino - versione semplificata

## Dati:

- uno zaino che sopporta un peso massimo $P$,
- un insieme $T = \{1, 2, \dots, n\}$ di *tipi* di oggetti. Ogni tipo $i$ di oggetti ha un peso $p_i$ e un valore $v_i$, entrambi interi positivi. (Per ogni tipo è disponibile una fornitura illimitata di oggetti.)

## Problema:

Vogliamo riempire lo zaino non superando $P$ con il peso complessivo degli oggetti, ma allo stesso tempo massimizzando la somma dei valori degli oggetti nello zaino.

Una soluzione $S$ è data da una lista di tipi, eventualmente ripetuti.
Es: 3 oggetti di tipo 1 + 2 oggetti di tipo 4 + 1 oggetto di tipo 5.

$$\sum_{i \in S} p_i = \leq P, \qquad \text{MAX}\left\{ \sum_{i \in S} v_i \mid S \right\}$$

# Il problema dello zaino (sempl.) - ricerca esaustiva

È chiaro che in linea di principio potremmo provare a enumerare tutti gli insiemi di oggetti che stanno nello zaino, e cercare quello con valore massimo. Se però i tipi sono molti, e la capacità dello zaino grande, il numero di soluzioni da esaminare diventa improponibile.

# Il problema dello zaino (sempl.) - sottoproblemi

## Struttura ricorsiva del problema - sottoproblemi

Se ho una soluzione ottima per uno zaino che regge $P$, e tolgo dalla soluzione un oggetto qualsiasi di tipo $t$, ottengo una soluzione ottima per uno zaino che regge $P - p_t$.

## Dimostrazione per assurdo:

Infatti, se per assurdo esistesse una soluzione migliore con peso inferiore a $P - p_t$, potrei aggiungerle un oggetto di tipo $t$ e ottenere così una soluzione migliore per il problema originale (il che è impossibile, avendo assunto che la soluzione fosse ottima).

# Il problema dello zaino (sempl.) - progr. dinamica

- Se conosciamo la soluzione ottima per uno zaino di peso $Q$, possiamo ottenere nuove soluzioni per zaini di grandezza superiore aggiungendo un oggetto di tipo $t$, per ogni tipo $t$ in $T$.
- In particolare, se ho una soluzione di valore $V$ per uno zaino di peso $Q$, allora so che esiste una soluzione di valore $V + v_t$ per uno zaino di peso $P + p_t$, per ogni $t$ in $T$.
- *Tutte le soluzioni ottime si ottengono in questo modo.*

# Il problema dello zaino (sempl.) - vettore di supporto

- Costruisco un vettore $s$ di lunghezza $P$, tale che $s[i]$ contenga il valore delle soluzioni ottime per uno zaino di peso $i$.
- Il vettore si può costruire partendo da $i = 0$ e incrementando $i$, sfruttando la relazione vista prima.
- Una volta completato il vettore $s$, il valore ottimo di una soluzione per $P$ è chiaramente dato da $s[P]$.

# Il problema dello zaino (sempl.) - esempio

Tabella dei pesi e dei valori dei tipi:

| Tipo | Peso | Valore |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 |
| 2 | 3 | 3 |
| 3 | 7 | 8 |

Nel seguente schema: la prima riga riporta gli indici, ciascuna delle righe successive rappresenta un passo dell'esecuzione:

| **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0 | 0 | | 3 | | 2 | | 8 | | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 8 | 8 | | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 2 | 8 | 8 | 8 | | | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 6 | 8 | 8 | 8 | 11 | | | | | |

...

# Il problema dello zaino - versione generale

- uno zaino che sopporta un peso massimo $P$,
- un insieme $E = \{1, 2, \ldots, m\}$ di oggetti. Ogni oggetto ha un peso $p_i$ e un valore $v_i$, entrambi interi positivi.

## Problema:

Vogliamo riempire lo zaino non superando $P$ con il peso complessivo degli oggetti, ma allo stesso tempo massimizzando la somma dei valori degli oggetti nello zaino.

## Riduzione?

Non possiamo più utilizzare la riduzione precedente: infatti, se tolgo un oggetto $e$ da una soluzione ottima per uno zaino che porta $P$, *non è detto che quanto rimane sia una soluzione ottima per uno zaino che porta* $P - p_e$. Infatti, utilizzando $e$ potrei ottenere una soluzione migliore per quel peso, e a questo punto non potrei aggiungerlo nuovamente: la dimostrazione per assurdo non funziona più.

# Il problema dello zaino - riduzione a sottoproblemi

*Riduco rispetto a due parametri: peso e numero di oggetti considerati!*

Cerco soluzione ottima $S_{P,j}$ per tutti gli zaini di peso inferiore a $P$ e *per tutti gli insiemi di oggetti* $1, 2, \ldots, j$ *con* $j \leq m$.

## Struttura ricorsiva

Sia $S_{P,j}$ soluzione ottima di valore $V$ per uno zaino di peso $P$ che utilizza gli oggetti $1, 2, \ldots, j$. Ci sono due possibilità:

- se $j \in S_{P,j}$, allora esiste soluzione ottima $S_{P-p_j,j-1}$ di valore $V - v_j$
- se $j \notin S_{P,j}$, allora esiste soluzione ottima $S_{P,j-1}$ di valore $V$ (data dallo stesso sottoinsieme!)

# Il problema dello zaino - riduzione a sottoproblemi

*Un vettore non sarà sufficiente!*

### Uso una matrice

che contiene nella posizione di indici $i$ e $j$ il valore della sottosoluzione ottima per uno zaino di peso $i$ che utilizza al più i primi $j$ oggetti di $E$ (chiaramente, $0 \leq i \leq P$ e $0 \leq j \leq m$).

### Costruisco la matrice

a partire dalla posizione $(0, 0)$.

### Il valore ottimo

sarà nella posizione $(P, m)$.